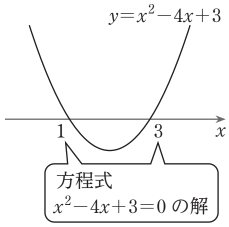
PART6 方程式への応用

要点① 3次方程式の実数解の個数

方程式 $f(x)=0$ の実数解は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標である。例えば，2次方程式 $x^2-4x+3=0$ の実数解は，2次関数 $y=x^2-4x+3$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標で，$x=1$，3 である。



方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数であり，その個数は，$y=f(x)$ の増減を調べ，グラフをかくことで求めることができる。

例 3次方程式 $x^3-3x-1=0$ の異なる実数解の個数を求める。

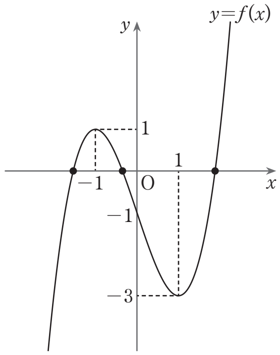
$f(x)=x^3-3x-1$ とおく。

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると $x=-1$，1

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は　個である。

ゆえに，方程式 $x^3-3x-1=0$ の異なる実数解の個数は　個である。

[MEMO]

6　次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$x^3-12x+12=0$

(2)　$x^3+3x^2-4=0$

(3)　$x^3+3x^2+3x+2=0$

Point Pickup

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数 $\Longleftrightarrow$ 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，グラフをかいて求めることができる。

第 17 講 PART6 確認問題

1 $f(x)=x^3-3x+1$ の極大値は ア，極小値は イ

よって，3 次方程式 $x^3-3x+1=0$ の異なる実数解の個数は ウ 個

[ア，イ の選択肢]

① -3　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 3　⑥ なし

2 $f(x)=2x^3-3x^2+1$ の極大値は エ，極小値は オ

よって，3 次方程式 $2x^3-3x^2+1=0$ の異なる実数解の個数は カ 個

[エ，オ の選択肢]

① -3　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 3　⑥ なし

3 $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ の極大値は キ，極小値は ク

よって，3 次方程式 $x^3-3x^2+3x+1=0$ の異なる実数解の個数は ケ 個

[キ，ク の選択肢]

① -2　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2　⑥ なし

PART6 方程式への応用

6 次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $x^3-12x+12=0$

(2) $x^3+3x^2-4=0$

(3) $x^3+3x^2+3x+2=0$

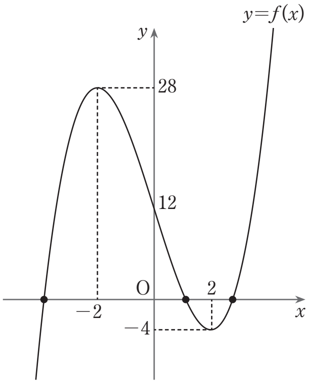
[解答]

(1) $f(x)=x^3-12x+12$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-4	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 3 個である。

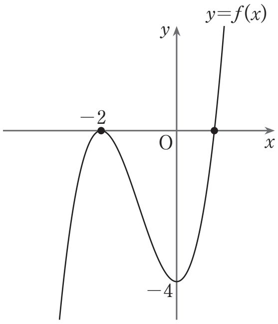
ゆえに，方程式 $x^3-12x+12=0$ の異なる実数解の個数は 3 個である。

(2) $f(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個である。

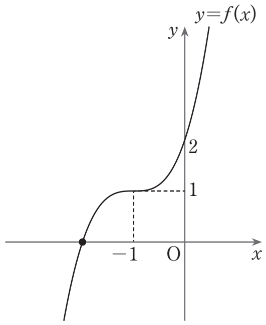
ゆえに，方程式 $x^3+3x^2-4=0$ の異なる実数解の個数は 2 個である。

(3)　$f(x)=x^3+3x^2+3x+2$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個である。

ゆえに，方程式 $x^3+3x^2+3x+2=0$ の異なる実数解の個数は 1 個である。

第17講　PART6 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤，イ：②，ウ：3

[解説]

$f(x)=x^3-3x+1$ より

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになり，$f(x)$ は

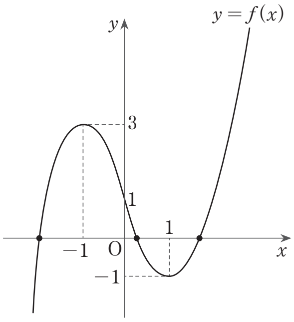
$x=-1$ で極大値 3,

$x=1$ で極小値 -1

をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，グラフと x 軸の共有点の個数は 3 個である。 [A]



ゆえに，方程式

$x^3-3x+1=0$ の異なる実数解の個数は **3 個**である。

[B]

[A]　$y=f(x)$ のグラフをかいて，x 軸との共有点の個数を求める。

[B]　3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数
$\Longleftrightarrow$ 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

2 **[正解]** エ：④，オ：③，カ：2

[解説]

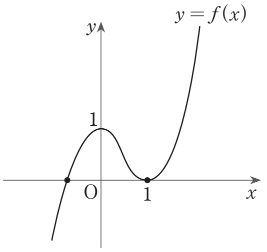
$f(x)=2x^3-3x^2+1$ より

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになり，$f(x)$ は $x=0$ で極大値 **1**，$x=1$ で極小値 **0** をとる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個である。[C]



ゆえに，方程式

$2x^3-3x^2+1=0$ の異なる実数解の個数は **2 個**である。[D]

[C]　$y=f(x)$ のグラフをかいて，x 軸との共有点の個数を求める。

[D]　3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数
⟺　関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

3 **[正解]** キ：⑥，ク：⑥，ケ：1

[解説]

$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ より

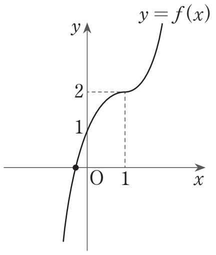
$$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになり，

$f(x)$ は**極値をもたない**。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↗

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個である。[E]



ゆえに，方程式

$x^3-3x^2+3x+1=0$ の異なる実数解の個数は **1 個**である。[F]

[E]　$y=f(x)$ のグラフをかいて，x 軸との共有点の個数を求める。

[F]　3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数
⟺　関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数